(SOS) ΑΣΚΗΣΗ (Σπιτι)

Εστω το συνολο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}\setminus\{(0,0)\}=M$
και η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} e^x-1, & (x,y)\in M \\ 0, & (x,y)\notin M \end{cases}$$

ΝΔΟ

α) Η f μερ. διαφορ $\iff (x,y)\notin M$

β) Η $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ υπαρχει $\forall v\in\mathbb{R}^2$ και $\|v\|=1$ $\rightarrow$ (κατευθ. παραγωγος)

γ) $\exists\, v\in\mathbb{R}^2$ με $\|v\|=1$: $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\neq\nabla f(0,0)\cdot v$

ΛΥΣΗ

α) $\bar{M}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$ οπου αν $(x,y)\in\bar{M}\iff\forall (x_\nu,y_\nu)\subset M : (x_\nu,y_\nu)\to(x,y)$ με $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ εχουμε $x=y$, και $(0,0)=\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)\in M$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2\setminus\bar{M}$ ανοικτο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus M$

f μεριkώς διαφορισιμη στο (x,y) αφου ως σταθερα.

Επισης $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

Αναλογα, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 \Rightarrow \nabla f(0,0)=\bar{0}$

Τελος, για $(x,y)\in M$ η f οχι μερικως διαφορ. αφου ∂x $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0,x_0)}{h}$ δεν υπαρχει

Επειδη η $g(x_0+h)=f(x_0+h,x_0)$ εχει τιμες $g(x_0)\neq 0$ και $g(x_0+h)=0\ \forall h\neq 0$ δεν ειναι συνεχης για $h=0$. Αναλογα $\nexists\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_0)\ \forall x_0\neq 0$

β) Έστω $v = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ τότε

$$\frac{\partial}{\partial v} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} f\left(\pm\frac{h}{\sqrt{2}}, \pm\frac{h}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{\pm\frac{h}{\sqrt{2}}}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\pm\frac{h}{\sqrt{2}}}-1}{\pm\frac{h}{\sqrt{2}}}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Αξιοσημ. όρια.

Για $v = (v_1, v_2) \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

γ) $$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \nabla f(0,0)\cdot v = (0,0)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Μερικές Παράγωγοι ανώτερης τάξης:

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Η f λέγεται $k+1$ φορές μερικώς διαφορίσιμη ($k \in \mathbb{N}$) αν είναι k φορές μερικώς διαφορίσιμη και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $k+1$ τάξης.

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right)$$

πχ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει μερικές παραγώγους 2 τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} := \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} := \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Η f λέγεται k φορές συνεχώς διαφορίσιμη ($k \in \mathbb{N}_0$) αν $\exists$ όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και k τάξης (ως προς οποιουσδήποτε συνδυασμούς μεταβλητών) και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Συμβολίζεται συνήθως $f \in C^k(U)$. $\forall k \in \mathbb{N}$ η f λέμε ότι είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη (ή λεία)

Συμβολίζεται συνήθως $f \in C^\infty(U)$

Πχ

Εαν $U \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(U) \Leftrightarrow \exists f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : U \to \mathbb{R}$ και να είναι συνεχείς

Παράδειγμα

$f(x,y) = x \cdot y + (x+2y)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

• Παράγωγοι 1ης τάξης

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + 2(x+2y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2(x+2y)$

• Παράγωγοι 2ης τάξης:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1+4 = 5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1+4 = 5$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8$

Άσκηση 1

$g(x,y,z) = e^{xy} + z \cdot \cos x$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Προφανώς $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Ασκηση 2

Εστω $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Η h απειρες φορες συνεχως διαφορισιμη στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ως ρητη. Στο $(0,0)$ $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x,0)-h(0,0)}{x} = 0$ ομοια $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$ και επειδη για $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ εχουμε $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)}$

και $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x \frac{x^4-y^4-4y^2x}{(x^2+y^2)^2}$ προκυπτει

$h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ αν $\frac{\partial h}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχης

ΘΔΟ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

δηλ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \frac{x^4-y^4+4x^2 \cdot y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Απο ισχυει οτι

$|x| \leq \|(x,y)\|$, $|y| \leq \|(x,y)\|$

$$\left| y \cdot \frac{x^4-y^4+4x^2 \cdot y^2}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| \leq |y| \frac{\|x\|^4 - \|y\|^4 + 4\|x\|^2\|y\|^2}{\|(x,y)\|^4} \leq$$

$$\leq |y| 6 \leq \|(x,y)-(0,0)\| \cdot 6$$